

Описание нормальных базисов граничных алгебр.

А.Я.Белов, А.Л.Чернятьев

Аннотация

В работе исследуются нормальные базисы для алгебр с медленным ростом. Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00548.

1 Введение.

Для произвольной алгебры A через $V_A(n)$ обозначим размерность векторного пространства, порожденного мономами длины не больше n . Пусть $T_A(n) = V_A(n) - V_A(n-1)$. Если алгебра однородна, то $T_A(n)$ есть размерность векторного пространства, порожденного мономами длины ровно n .

Известно (см.) что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = -\infty$ (в этом случае есть альтернатива (**Bergman Gap Theorem**): либо $\lim V_A(n) = C < \infty$ и тогда $\dim A < \infty$, либо $V_A(n) = O(n)$ и алгебра имеет **медленный рост**), либо $T_A(n) - n < \text{Const}$, либо, наконец, $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = \infty$.

В последнем случае для любой функции $\phi(n) \rightarrow \infty$ и любой $\psi(n) = e^{o(n)}$ существует алгебра A такая, что для бесконечного множества натуральных чисел $n \in L \subset \mathbb{N}$ $T_A(n) > \psi(n)$ и для бесконечного множества натуральных чисел $n \in M \subset \mathbb{N}$ $T_A(n) < n + \phi(n)$ (см.).

Таким образом, в случае $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = \infty$ рост может быть хаотичным и мы этот случай не рассматриваем. Случай, когда $T_A(n) - n < \text{Const}$ (т.е. случай алгебр **медленного роста**) исследовался Дж. Бергманом и Л. Смоллом. Нормальные базисы для таких алгебр исследованы в работе [1]. Назовем алгебру **граничной**, если $T_A(n) - n < \text{Const}$. Наша цель состоит в описании нормальных базисов граничных алгебр.

Прежде всего отметим, что такое описание сводится к мономиальному случаю. В самом деле, пусть a_1, \dots, a_s — образующие алгебры A . Порядок $a_1 < \dots < a_s$ индуцирует порядок на множестве слов алгебры A (сперва по длине, затем лексикографически). Назовем слово **неуменьшаемым** (или **неприводимым**), если его нельзя представить в виде линейной комбинации меньших слов. Множество неуменьшаемых слов образует **нормальный базис** алгебры A как векторного пространства. Рассмотрим фактор свободной алгебры $k \langle \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s \rangle$ (k — основное поле) по множеству слов из нормального базиса. Получится мономиальная алгебра с тем же нормальным базисом и, стало быть, с той же функцией роста.

Назовем **обструкцией** приводимое (то есть уменьшаемое) слово u такое, что любое его подслово неприводимо. Сверхсловом в алгебре A (правым, левым, двухсторонним) называется сверхслово W такое, что любое его конечное подслово ненулевое. Аналогично определяется **неприводимое сверхслово** в алгебре A .

Для описания нормальных базисов граничных алгебр нам потребуется ряд определений и утверждений, используемых в комбинаторике слов.

2 Комбинаторика слов и графы Рози.

2.1 Пространство слов.

Здесь и далее через A будем обозначать конечный алфавит, то есть непустое множество элементов (символов). Через A^+ обозначим множество всех конечных последовательностей, символов, или **слов**.

Конечное слово всегда может быть единственным образом представлено в виде $w = w_1 \cdots w_n$, где $w_i \in A, 1 \leq i \leq n$. Число n называется **длиной** слова w и обозначается $|w|$.

Множество A^+ всех конечных слов над A образует простую полугруппу, где полугрупповая операция определяется как конкатенация (приписывание).

Если к множеству слов добавить элемент Λ (пустое слово), то получим свободный моноид A^* над A . Длина Λ по определению равна 0.

Слово u есть **подслово** (или **фактор**) слова w , если существуют слова $p, q \in A^+$ такие, что $w = p u q$.

Если слово p (или q) равно Λ , то u называется **префиксом** (или **суффиксом**) слова w .

Определение 2.1 Слово W называется **рекуррентным**, если каждое его подслово встречается в нем бесконечно много раз (в случае двустороннего бесконечного слова, каждое подслово встречается бесконечно много раз в обоих направлениях). Слово W называется **равномерно-рекуррентным** или (**р.р. словом**), если оно рекуррентно и для каждого подслова v существует натуральное $N(v)$, такое, что для любого подслова W и длины не менее, чем $N(v)$, v является подсловом u .

Пусть W – бесконечное слово. Для любого подслова v можно определить множество **возвращаемых** слов $\text{Ret}_W(v)$, а именно, слово u – **возвращаемое** для v , если $v u v$ – подслово W и v – не является подсловом u . Ясно, что для рекуррентных слов множество возвращаемых слов $\text{Ret}(v)$ каждого подслова v будет непустым, а в случае равномерной рекуррентности множество длин слов из $\text{Ret}(v)$ будет ограниченным.

Определение 2.2 Для произвольного слова W можно определить функцию роста:

$$T_W(n) = \text{Card } F_n(W)$$

Ясно, что если $T_W(n) = 0$ для какого-то n , то W – конечное слово. В противном случае бесконечное.

Определение 2.3 Рассмотрим бесконечное (одностороннее или двустороннее) слово над алфавитом A . Пусть v – его подслово и $x \in A$. Тогда

1. Символ x – левое (правое) расширение v , если xv (соотв. vx) принадлежит $F(W)$.
2. Подслово v называется левым (правым) специальным подсловом, если для него существуют два или более левых (правых) расширения.
3. Подслово v называется биспециальным, если оно является и левым, и правым специальным подсловом одновременно.
4. Количество различных левых (правых) расширений подслова назовем левой (правой) валентностью этого подслова.

2.2 Графы Розы подслов.

Удобным инструментом для описания слова W является **графы подслов**, или графы Розы (Rauzy's graphs), введенные Розы [11], которые строятся следующим образом: **k -граф** слова W – ориентированный граф, вершины которого взаимнооднозначно соответствуют подсловам длины k слова W , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k + 1$, у которого первые k символов – подслово соответствующее A , последние k символов – подслово, соответствующее B . таким образом, ребра k -графа биективно соответствуют $(k + 1)$ -подсловам слова W .

Ясно, в k -графе G слова W правым специальным словам соответствуют вершины, из которых выходит (соотв. в которые входит) больше одной стрелки. Такие вершины мы будем называть развилками. Граф G будем называть **сильно связным**, если из любой вершины в любую вершину можно перейти по стрелкам.

Последователем ориентированного графа G будем называть ориентированный граф $\text{Fol}(G)$ построенный следующим образом: вершины графа G биективно соответствуют ребрам графа G , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в графе G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B .

Связность графов Розы и рекуррентность соответствующего слова связаны естественным образом. Имеет место следующее

Предложение 2.4 Пусть W – бесконечное (в одну сторону) слово. Следующие условия эквивалентны:

1. Слово W – рекуррентно.
2. Для всех k соответствующий k -граф слова W является сильно связным.
3. Каждое подслово W встречается не меньше двух раз.
4. Любое подслово является продолжаемым слева.

В терминах графов Розы можно выразить такие важные понятия, как рост подслов, множество запрещенных подслов, минимальные запрещенные слова и т.д.

3 Слова Штурма.

Хорошо изученным примером равномерно-рекуррентных слов с медленным ростом являются слова Штурма ([8], [7]). Дадим несколько определений.

Определение 3.1 Бесконечное вправо (соответственно, двустороннее бесконечное) слово $W = (w)_{n \in \mathbb{N}}$ (соответственно, $W = (w)_{n \in \mathbb{Z}}$) над конечным алфавитом A называется словом Штурма, если его функция сложности равна $T_W(n) = n + 1$ для всех $n \geq 0$.

Примечание 1. Так как $T_W(1) = 2$, то слово Штурма по определению является словом над двухсимвольным алфавитом.

Определение 3.2 Слово W называется сбалансированным, если для любых его двух подслов u, v одинаковой длины выполняется неравенство:

$$||u|_a - |v|_a| \leq 1 \quad (1)$$

Рассмотрим еще один способ конструирования бесконечных сверхслов над бинарным алфавитом.

Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ – его открытое подмножество, $f : M \rightarrow M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка.

По последовательности итераций можно построить бесконечное слово над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U \\ & x \end{cases}$$

которое называется **эволюцией** точки x_0 .

Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: U_1, \dots, U_n .

Пусть \mathbb{S}^1 – окружность единичной длины, $U \subset \mathbb{S}^1$ – дуга длины α , T_α – сдвиг окружности на иррациональную величину α . Слова, получаемые такими динамическими системами, иногда называют **механическими словами** (**mechanical words**).

Замечательным фактом, описывающим структуру слов Штурма является **Теорема эквивалентности**.

Теорема 3.3 Следующие условия на слово W эквивалентны:

1. Слово W имеет функцию сложности $T_W(n) = n + 1$.
2. Слово W сбалансированно и не периодично.
3. Слово W является механическим, то есть порождается системой $(\mathbb{S}^1, U, T_\alpha)$ с иррациональным α .

□

4 Слова с минимальной функцией роста.

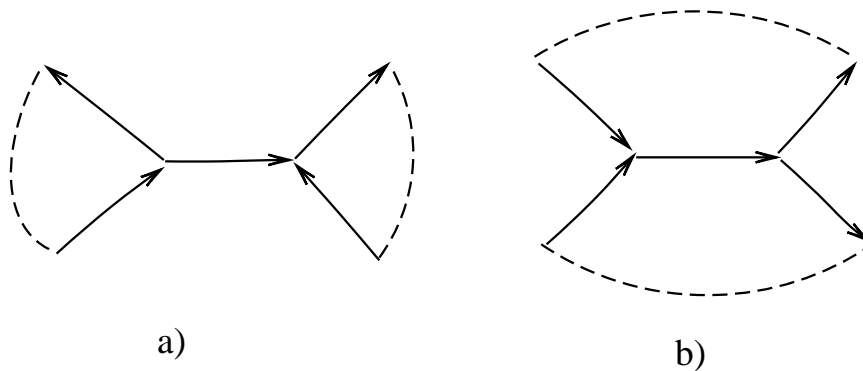
Естественным обобщением слов Штурма являются слова с минимальной функцией роста, то есть с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $F_W(n+1) - F_W(n) = 1$ при всех достаточно больших n .

В этой части мы построим динамическую систему, которая аналогичным образом могла бы порождать слова медленного роста. В этой части мы будем рассматривать слова над произвольным алфавитом $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Пусть слово W будет словом медленного роста, то есть, начиная с некоторого N верно $T_W(k+1) = T_W(k) + 1, k \geq N$.

Рассмотрим k -графы Розы этого слова для $k \geq N$. Так как ребра графа соответствуют $(k+1)$ -словам, то в этом графе m вершин и $m+1$ ребро и, соответственно, имеет одну входящую и одну выходящую развилку, которые, возможно, совпадают (если данная вершина соответствует биспециальному слову).

Имеется два типа таких графов:



Два типа графов с одной входящей и одной выходящей развилкой.

Легко видеть, что граф типа а) не является сильно связным, а в случае б) – является. Слова с k -графами типа б) имеют вид $u^\infty V v^\infty$ и не являются равномерно-рекуррентными

Нас интересует случай а).

Назовем путь, ведущий из входящей развилки в выходящую **перегородкой**, а два пути из выходящей развилки будем называть **дугами**.

Предложение 4.1 Пусть k -граф слова W имеет перегородку длины $l \geq 1$ и дуги длины r, s . Тогда последователь $\text{Fol}(G)$ имеет перегородку длины $l - 1$, дуги длины $r + 1$ и $s + 1$ и совпадает с $(k + 1)$ -графом слова W .

Рассмотрим теперь предельный случай, когда перегородка вырождается, то есть входящая развилка совпадает с выходящей. В этом случае развилка соответствует биспециальному слову.

Предложение 4.2 Последователь графа с вырожденной перегородкой имеет две входящие и две выходящие развилки

Пусть u – биспециальное подслово W , то есть при некоторых $a_i, a_j, a_r, a_s \in A$ $a_i u, a_j u, u a_r, u a_s$ – тоже подслова W . Тогда развилками (входящими и выходящими) в $\text{Fol}(G)$ будут вершины соответствующие этим словам.

Таким образом, для $(k + 1)$ -графа слова W имеется 4 возможности для удаления одного ребра из $\text{Fol}(G)$, соответствующего минимальному запрещенному $(k + 2)$ -слову: $a_i u a_r, a_i u a_s, a_j u a_s, a_j u a_r$. В двух случаях мы получаем сильно связный граф, а в двух – не сильно связный.

Непосредственной проверкой доказывается

Предложение 4.3 Пусть в графе G перегородка вырождена, а дуги имеют длину r, s соответственно. Тогда $(k + 1)$ -граф имеет вид $(s - 1, 1, r + 1)$ или $(r - 1, 1, s + 1)$.

Предложение 4.4 Любой граф G с одной входящей и одной выходящей развилкой имеет предшественника, причем только одного.

Доказательство. Пусть граф имеет вид (l, r, s) . Заметим, что графа с $r = s = 1$ не бывает. В случае, если $r, s > 1$ граф предшественника имеет вид $(l + 1, r - 1, s - 1)$, если имеет вид $(l, 1, s)$, $s > 1$, то предшественник – $(0, l + 1, s - 1)$, если $(l, r, 1)$, $r > 1$ – то $(0, s + 1, l - 1)$. Граф вида $(0, 1, k)$ имеет предшественника $(0, 1, k - 1)$. \square

Ясно, что любой граф может быть получен из графа типа $(0, 1, 2)$ или $(0, 2, 1)$. Из предложения 4.4 следует, что для слова с минимальной функцией роста W существует такое слово Штурма V и такие натуральные n и l , что k -графы для слова W совпадают с $(k + l)$ -графами слова Штурма V для $k \geq n$.

Предложение 4.5 Пусть W – слово с минимальной функцией роста, тогда существует натуральное k , что для любого подслова $v \subset W$ такого, что $|v| \geq k$, существует ровно два возвращаемых слова.

Доказательство. Рассмотрим слово Штурма, такое что эволюция k -графов Розы слова W и графов слова V совпадают, начиная с некоторого n . Тогда k -словам слова W биективно соответствуют $(k + l)$ -словам слова V . Поскольку для подслов слова Штурма существует ровно 2 возвращаемых слова, то это же верно и для подслов слова W . \square

Из этих же соображений доказывается

Предложение 4.6 рекуррентное слово с минимальной функцией роста равномерно рекуррентно.

\square

4.1 Конструкция динамической системы

Теперь мы покажем, как по соответствующему графу слов построить динамическую систему, которая порождала бы данное слово.

Построение динамической системы мы осуществим двумя способами. Первый способ опирается на уже известный результат о словах Штурма. Второй способ – более конструктивный и обобщающийся на случай нескольких развилок.

Итак, пусть слово W имеет минимальный рост, т.е., с некоторого k его k -графы слова W имеют вид а).

Поскольку каждый граф имеет единственного предшественника, то существует последовательность графов типа а) G'_1, G'_2, \dots, G'_n таких, что G'_{l+1} является предшественником G'_l , а граф G'_n совпадает с k -графом слова W .

Иными словами, существует эволюция k -графов типа а), начиная с $k = 1$, что n -ый граф в эволюции совпадает с k -графом слова W , $(n + 1)$ -ый совпадает с $(k + 1)$ -графом слова W и т.д.

Последовательность графов такого типа однозначно соответствует некоторому слову Штурма V .

Значит, существует взаимнооднозначное соответствие между k -словами слова W и n -словами слова Штурма V , при этом соответствие продолжается на $(k + 1)$ -слова W и $(n + 1)$ -слова V и т.д.

Разберем сначала случай, когда $k = 1$, то есть уже 1-граф слова W имеет вид а). Символам алфавита A взаимнооднозначно соответствуют n -слова некоторого слова Штурма V . По теореме эквивалентности, слово V порождается сдвигом окружности T_α . При этом n -словам в динамике соответствуют интервалы разбиения: слову $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ($w_i \in \{a, b\}$) соответствует интервал

$$I_w = T_\alpha^{(-n+1)}(I_{w_1}) \cup T_\alpha^{(-n+2)}(I_{w_2}) \cup \dots \cup I_{w_n},$$

где I_{w_i} – характеристический интервал для w_i .

Для сдвига окружности интервалы I_w , соответствующие n -словам, будут иметь вид $I_w = (n_i \alpha, n_{i+1} \alpha)$, где n_i – некоторые целые числа.

Тогда характеристическим множеством для каждого символа из алфавита A будет являться интервал I_w , такой, что слово w соответствует данному символу. Ясно тогда, что слово W будет порождаться тем же сдвигом T_α и характеристическими множествами I_w .

Теперь разберем общий случай. Пусть k -словам слова W соответствуют n -слова слова Штурма V . Точно также мы можем построить соответствие между интервалами разбиения для n -слов слова Штурма I_w и k -словами слова V . Построим характеристическое множество для каждого символа из A .

А, именно, символу a_i поставим в соответствие все интервалы, которые соответствуют словам, начинающимся на a_i . В этом случае характеристическое множество для произвольного символа может быть несвязным и представлять собой объединение нескольких интервалов.

Покажем, что при таком выборе характеристических множеств найдется точка, чья эволюция будет совпадать с W .

Действительно, пусть слово W начинается с некоторого k -слова $w = w_1 w_2 \dots w_k$. Ему мы поставим в соответствие интервал I_w . Рассмотрим следующий $k + 1$ символ w_{k+1} ; этому $(k + 1)$ -слову мы поставим в соответствие интервал $I_w \cup I_{w'}$, где $w' = w_2 w_3 \dots w_{k+1}$, и т.д.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.7 Пусть W – рекуррентное слово над произвольным конечным алфавитом A . Тогда следующие условия на слово W эквивалентны:

1. Существует такое натуральное N , что функция сложности слова W равна $T_W(n) = n + K$, для $n \geq N$ и некоторого постоянного натурального K .

2. Существуют такое иррациональное α и целые n_1, n_2, \dots, n_m , что слово W порождается динамической системой

$$(\mathbb{S}^1, T_\alpha, I_{a_1}, I_{a_2}, \dots, I_{a_n}, x),$$

где T_α – сдвиг окружности на иррациональную величину α , I_{a_i} – объединение дуг вида $(n_j\alpha, n_{j+1}\alpha)$.

5 Основная теорема.

Теорема 5.1 (Описание нормальных базисов граничных алгебр) Пусть A – граничная алгебра, a_1, \dots, a_s – ее образующие. Тогда имеют место два случая, каждый из которых имеет свое описание.

Случай 1. Алгебра A не содержит равномерно-рекуррентного непериодического сверхслова. В этом случае нормальный базис алгебры A состоит из множества подслов следующего множества слов:

1. Одно слово вида $W = u^{\infty/2}cv^{\infty/2} \neq u^\infty$
2. Произвольный конечный набор μ конечных слов
3. Множество слов вида $u_i^{\infty/2}c_i$, $i = 1, \dots, r_1$
4. Множество слов вида $d_iv_i^{\infty/2}$, $i = 1, \dots, r_2$
5. Множество слов вида $e_j(R_j)^kf_j$, $k \in \mathbb{K}_j \subseteq \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, r_3$
6. Множество слов вида $W_\alpha = E_\alpha u^{n_\alpha}cv^{m_\alpha}F_\alpha$. При этом существуют такое $c > 0$, что для любого k количество слов W_α длины k меньше c .

Случай 2. Алгебра A содержит равномерно-рекуррентное непериодическое сверхслово W . В этом случае нормальный базис алгебры A состоит из множества подслов следующего семейства слов, включающее в себя:

1. Некоторое равномерно рекуррентное слово W с функцией роста $T_W(n) = n + \text{const}$ для всех достаточно больших n . Описание таких слов дано в теореме 4.7.
2. Произвольный конечный набор μ конечных слов
3. Множество слов вида $u_i^{\infty/2}c_i$, $i = 1, \dots, s_1$
4. Множество слов вида $d_iv_i^{\infty/2}$, $i = 1, \dots, s_2$
5. Множество слов вида $e_j(R_j)^kf_j$, $k \in \mathbb{K}_j \subseteq \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, s_3$
6. Множество слов вида $L_iO_iW_i$, $i = 1, \dots, k_1$. При этом W_i – сверхслово, эквивалентное W и O_iW_i имеют вхождение только одной обструкции (а, именно, O_i).
7. Множество слов вида $W'_jO'_jL'_j$, $j = 1, \dots, k_2$. При этом W'_j – сверхслово, эквивалентное W и $W'_jO'_j$ имеют вхождение только одной обструкции (а, именно, O'_j).
8. Конечное множество серий вида: $h^1iT_ih^2_i$, $i = 1, \dots, s$. При этом:
 - а) слово T_i содержит вхождение ровно двух обструкций O_{i_1}, O_{i_2} (возможно, перекрывающихся)
 - б) Для некоторого $c > 0$ $|h^1_i| + |h^2_i| < c$ при всех i .
 - с) Существует $m > 0$ такое, что для любого k имеется не более k подслов длины m , вида (8) и не являющихся подсловами слова W .

Доказательство. Алгебру A считаем мономиальной. Назовем слово v алгебры A **хорошим**, если для любого n существуют сколь угодно длинные слова w_1, w_2 , $|w_1| > n, |w_2| > n$ такие, что w_1vw_2 есть подслово алгебры A . Обозначим $T_{RL}(n)$ количество хороших слов длины n . Известно, что если $T_{RL}(n) = T_{RL}(n+1)$ при некотором n , то алгебра A имеет медленный рост (см. [1]). В силу граничности алгебры A $T_{RL}(n) \geq T_{RL}(n+1) + 1$, при всех достаточно больших n неравенство превращается в равенство (иначе $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{RL}(n) - n) = \infty$ и, как следствие $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_A(n) - n) = \infty$).

При этом граф Рози имеет развилку и, как следствие, два цикла, эволюция графа Рози устроена следующим образом: либо граф теряет сильную связность и имеет вид а). В этом случае его дальнейшая эволюция однозначна, она отвечает слову вида $u^{\infty/2}cv^{\infty/2}$ и мы имеем случай 1, либо граф Рози все время остается сильно связным. Тогда эволюция связной компоненты, в которой есть развилка, асимптотически эквивалентна эволюции графа Рози некоторого слова Штурма. Если оно имеет вид $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$, то имеет место случай 1, иначе оно равномерно-рекуррентно и имеет место случай 2.

В случае 1 все обструкции для слова $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$ имеют ограниченную длину (см. [1]). Можно сделать следующее

Наблюдение. Количество ненулевых слов длины n , не являющихся подсловами слова $u^{\infty/2}cu^{\infty/2}$ не превосходит константы (не зависящей от n).

Напомним предложение из работы [1]:

Предложение 5.2 Пусть $SW = WT$. Тогда W имеет вид: $s^k s_1$, где s_1 – начало слова s .

Из данного предложения и только что сделанного наблюдения вытекает

Следствие 5.3 Пусть $|u| = k$, $|v_1| = |v_2| = l$. Тогда либо количество подслов длины $k+t$, (где $t \leq k$) слова v_1uv_2 не менее $t+1$, либо $u = s^k s'$, для некоторого слова s , при этом s' – начало s и $v_1 = v'_1 s'$.

Из данного следствия и наблюдения получается

Предложение 5.4 Существует константа K , зависящая только от граничной алгебры A , такая, что для любой обструкции O в слове W либо при некотором t для любых v_1, v_2 , $|v_1| \geq t$, $|v_2| \geq t$ $v_1 O v_2$ является нулевым словом алгебры (число t не зависит от выбора обструкции), либо $|v| \leq K$.

Из данного предложения следует, что словами алгебры A являются либо слова, содержащие не более двух обструкций, причем каждая обструкция находится на ограниченном расстоянии от одного из концов, либо подслов слов вида $R_i u_i^k T_i$. А все такие типы слов описаны в условии теоремы 5.1. \square

Список литературы

- [1] А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.
- [2] А.Белов, Г.Кондаков, Обратные задачи символической динамики // Фундаментальная и прикладная математика, Т1, №1, 1995
- [3] Белов А. Я. Чернятьев А.Л., Слова медленного роста и перекладывания отрезков // Успехи Мат. Наук, 2008, 63:1(379), стр. 159–160. В этой работе Белову А.Я. принадлежит постановка задачи и формулировка основной теоремы, Чернятьеву А.Л. принадлежат доказательства основных теорем 1 и 2.

- [4] Чернятьев А. Л., Сбалансированные слова и символическая динамика, *Фундаментальная и прикладная математика*, Том 13, выпуск 5, 2007 г., стр. 213–224.
- [5] P. Arnoux and G. Rauzy [1991], Representation geometrique des suites the complexite $2n + 1$ // *Bull. Soc. Math. France* 119, 199-215.
- [6] G.M. Bergman, A note on growth functions of algebras and semigroups // *Research Note*, University of California, Berkeley, 1978.
- [7] J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) // *Algebraic Combinatorics on Words*, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).
- [8] M. Lothaire, *Combinatorics on Words* // *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.
- [9] G. Rauzy, Suites á termes dans un alphabet fini // In *Sémin. Théorie des Nombres*, p. 25-01-25-16, 1982-1983, Exposé No 25.
- [10] L. Vuillon, Balanced words // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 10 (2003), no. 5, 787-805
- [11] G. Rauzy, Mots infinis en arithmetique, in: *Automata on Infinite Words* // *Ecole de Printemps d'Informatique Thfeorique*, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165-171, 1985